

Máme funkciu:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sin(y)} & , \quad [x, y] \in \mathbb{R}^2 \setminus \{[x, \pi] \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} \quad k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , \quad [x, y] \in \{[x, \pi] \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R}\} \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

a). Najprv si všimnime, že limita po x -ovej osi je rovná funkčnej hodnote a to 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0 = f(0, 0)$$

• limita po y -vej osi je tiež 0. Pre $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ $\sin y \neq 0$ a teda:

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{\sin(y)} = 0 = f(0, 0)$$

• Zvolme si ľubovoľnú inú priamku $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $p(x) = \lambda x$, ktorá prechádza bodom $[0, 0]$. Potom:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, p(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(\lambda x)} \stackrel{\text{Volsf}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\lambda} \cdot \frac{\lambda x}{\sin(\lambda x)} = \frac{0}{\lambda} \cdot 1 = 0$$

b). Avšak keď si zvolíme krivku $q(x) = x^2$, tak dostaneme

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, q(x)) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin(x^2)} \stackrel{\text{Volsf}}{=} 1, \text{ takže pre}$$

každé okolie bodu (0) vieme nájsť dvojicu bodov $[x, \bar{y}] = [x, x^2]$ takú, že $f(x, x^2)$ je blízko pri hodnote 1 a teda funkcia naozaj v $(0, 0)$ nemá limitu.